| 머리말 |

"어떻게 하면 수학을 잘 할 수 있나요?"

학생들로부터 가장 많이 받는 질문입니다.
수학 공부를 할 때 꼭 염두에 두어야 할 세 가지를 짚어보면서 질문에 답해 보겠습니다.

첫째, 수학은 **언어**입니다.
어느 낯선 문명의 말과 글을 듣고 볼 때 낯설고 어색하여 답답함을 느끼듯이 수학도 처음에는 어색하고 답답한 수식들의 세계처럼 느껴집니다.
이때 필요한 것은 **틀릴 것을 두려워하지 않는 용기**입니다.

수학에 등장하는 정의, 성질, 법칙들은 수학의 세계에서 통용되는 기본단어, 숙어, 관용구와도 같기 때문에 그대로 써 보고, 그대로 읽어 보고, 또 쓰고, 또 읽고, ... 남에게 말 할 수 있을 때까지 해야 합니다.

둘째, 수학은 **문제풀이를 통해서 이해하는 학문**입니다.
한마디로 문제를 풀어 봐야 개념이 완벽해진다는 말입니다.
이때 필요한 것은 **인내심이며 충분한 시간**입니다.

처음에는 쉬운 문제부터 시작하기 바랍니다. 처음부터 지나치게 어려운 문제에 매달리다 보면 개념의 흐름을 놓치고 자꾸만 자괴감에 휩싸이게 됩니다. 문제를 풀고 나서 반드시 개념을 다시 읽고 써 보기 바랍니다.
즉, 확신이 생기고 자신감이 생길 때까지 해야 합니다.

셋째, 수학은 **시행착오를 거치면서 터득되는 학문**입니다.
개념에 대한 단편적인 이해를 넘어 그 적용 단계에 이르면 자신에게 숨어 있던 허점들이 나타나게 됩니다.
그 허점을 극복해 나가는 과정이 수학 실력이 느는 과정입니다.
이때 필요한 것은 **냉혹하고 집요한 반성**입니다.

반드시 자신의 풀이를 되돌아보고, 왜 틀렸는지, 틀리지 않기 위해서는 무엇을 염두에 두어야 하는지 꼼꼼하게 정리해 봐야 합니다. 자기가 틀린 이유를 설명할 수 있을 때까지 해야 합니다.

이 책을 통해서 수학을 접할 여러분을 그려봅니다.
공부하는 즐거움보다 점수가 주는 위압감이 더 앞서는 시대...
그러나 위의 세 가지 사항을 명심하고 나아간다면 여러분의 수학 실력은 나날이 발전해 갈 것이라고 확신합니다.
여러분 모두의 건투를 빕니다.

– 한석만 –

수학의 원리 미리보기

• 단원을 세분화하고 꼭 필요한 내용을 수록하였습니다.
• 고등학교 학생들이 반드시 알아야 할 개념들을 개정교육과정에 맞춰 사전식으로 정리하여 쉽게 이해할 수 있도록 구성하였습니다.

01 수열의 극한

함수 $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$에서 x의 값이 한없이 커지면 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

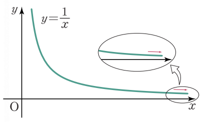
$x\to\infty$일 때 함수 $f(x)$는 0에 수렴

한다. 즉,

$x\to\infty$일 때 함수 $f(x)$의 극한값은 0

이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

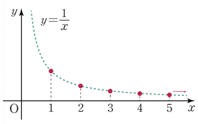
$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$



한편, 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n이 $a_n=\frac{1}{n}$일 때

$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{3},\ a_4=\frac{1}{4},\ \cdots$

이므로 순서쌍 $(n,\ a_n)$을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

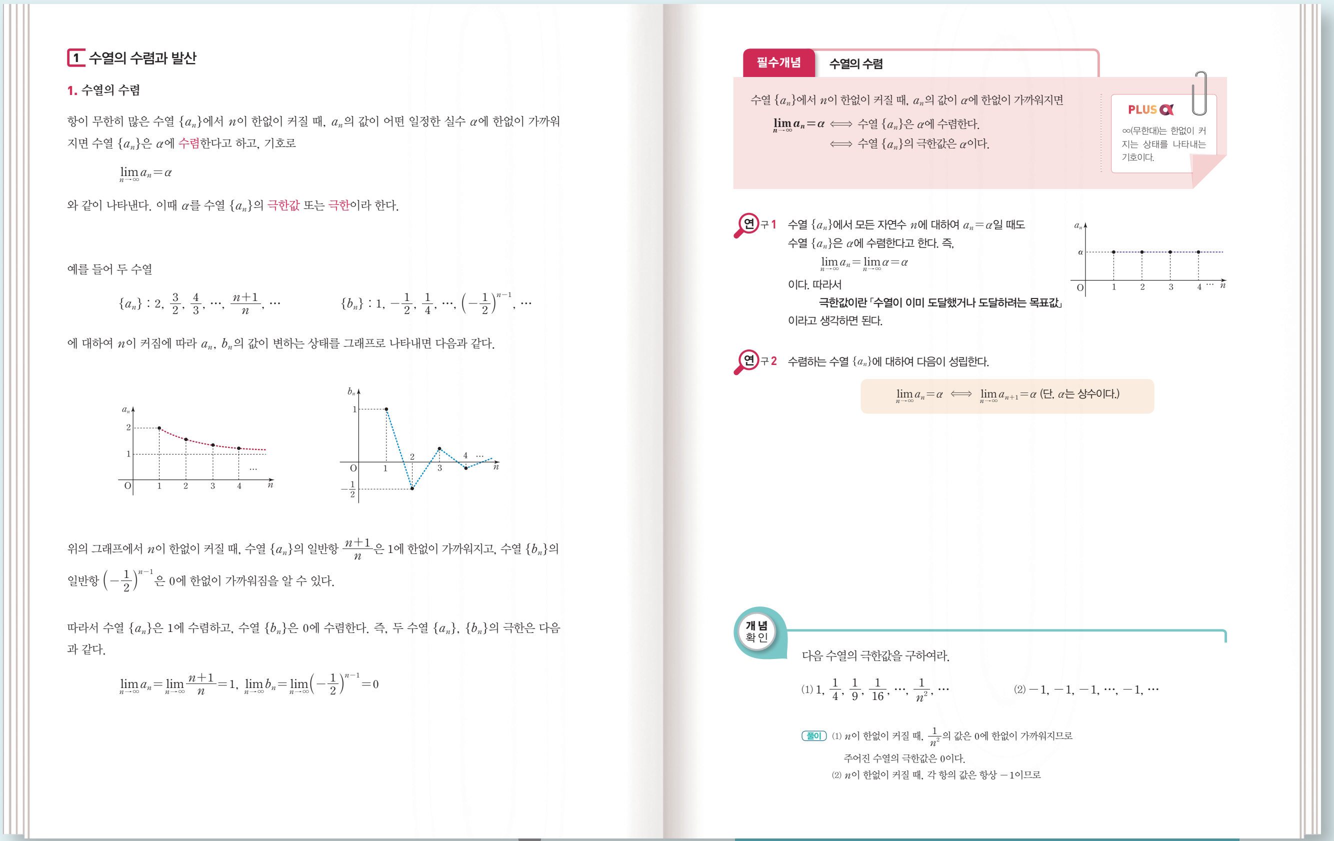


따라서 일반항이 $a_n=\frac{1}{n}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

n이 한없이 커지면 a_n의 값은 0에 한없이 가까워진다.
$\Longleftrightarrow$ $n\to\infty$일 때 수열 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다.
$\Longleftrightarrow$ $n\to\infty$일 때 수열 $\{a_n\}$의 극한값은 0이다.
$\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

단원 들어가기

본문 내용을 학습하기에 앞서 이전에 배운 내용 또는 이 단원에서 배우는 학습 내용에 대한 기초가 되는 지식을 정리하여 개념을 더욱 쉽게 이해할 수 있도록 하였습니다.



1 수열의 수렴과 발산

1. 수열의 수렴

항이 무한히 많은 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값이 어떤 일정한 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

와 같이 나타낸다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 한다.

예를 들어 두 수열

$$\{a_n\} : 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots \qquad \{b_n\} : 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots$$

에 대하여 n이 커짐에 따라 a_n, b_n의 값이 변하는 상태를 그래프로 나타내면 다음과 같다.

위의 그래프에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $\frac{n+1}{n}$은 1에 한없이 가까워지고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1에 수렴하고, 수열 $\{b_n\}$은 0에 수렴한다. 즉, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

필수개념 수열의 수렴

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값이 α에 한없이 가까워지면

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \iff$ 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다.

$\iff$ 수열 $\{a_n\}$의 극한값은 α이다.

PLUS α

∞(무한대)는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호이다.

연구 1 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \alpha$일 때도 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \alpha = \alpha$$

이다. 따라서

극한값이란 「수열이 이미 도달했거나 도달하려는 목표값」

이라고 생각하면 된다.

연구 2 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \iff \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha \text{ (단, } \alpha\text{는 상수이다.)}$$

개념 확인

다음 수열의 극한값을 구하여라.

(1) $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{n^2},\ \cdots$ (2) $-1,\ -1,\ -1,\ \cdots,\ -1,\ \cdots$

풀이 (1) n이 한없이 커질 때, $\frac{1}{n^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열의 극한값은 0이다.

(2) n이 한없이 커질 때, 각 항의 값은 항상 -1이므로

개념 정리

개념에 대한 설명 및 공식, 성질 등을 실례를 들어
구체적으로 자세히 설명하여 쉽고 정확하게
이해할 수 있도록 하였습니다.
또한, 개념 설명과 필수개념이 마주보고 있어
효과적으로 학습할 수 있도록 하였습니다.

필수개념 개념을 한눈에 확인할 수 있도록 정리

PLUS α 개념 이해에 도움이 되는 용어 및 간단한 공식 정리

연구 학습 내용 중 확장, 심화, 통합할 수 있는 내용을 정리

개념 확인 학습한 내용을 바로 확인할 수 있는 문제

필수문제 | 1 수열의 극한에 대한 기본 성질 ▶Link P. 17 필수개념

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

풀이

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+1)-1\}=\lim_{n\to\infty}(a_n+1)-\lim_{n\to\infty}1$$
$$=3-1=2$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\times a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}\times\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=2\times2=4$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=2\times4=8$$

답 ④

필수 문제

실전에 자주 출제되는 문제들을 엄선하여 해결 과정을 제시함으로써
해당 유형에 대한 이해를 확실히 할 수 있도록 하였습니다.

노트 필기

꼭 알아야 할 개념들을 되짚어 주어 실전에 활용할 수 있도록 하였습니다.

유제

필수문제와 유사한 문제로
유형에 대해 반복 학습을 할
수 있도록 제시하였습니다.

노트 필기

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 상수)일 때,

(i) $\lim_{n\to\infty}ka_n=k\alpha$ (단, k는 상수)

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$ (복부호 동순)

(iii) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$

(iv) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

정답 및 해설 P 2

유제 1-1

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$, $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구하여라. (단, $a_n\neq0$)

유제 1-2

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(b_n-4)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-2$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$의 값을 구하여라. (단, α는 상수이다.)

연습 문제

중단원별로 학습한 내용을 난이도별(개념, 실력, 심화)로 구성하여 연산 능력 및 통합적 사고력을 향상시킬 수 있도록 하였습니다.

연 습 문 제

실력 완성

06 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3+2n^2+1}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

07 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2^n+3^n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

특강

교과서에는 자세히 다루지는 않지만 실전에 꼭 필요한 개념들을 별도로 모아 학생들의 실력을 한 단계 더 업그레이드 할 수 있도록 하였습니다.

Topic

특강에서 학습한 개념을 요약 정리하였고 문제를 통해 이해를 극대화할 수 있도록 하였습니다.

특강 PRINCIPLES OF MATH

부분합과 급수의 수렴, 발산

다음과 같이 0에 수렴하는 수열

$$\{a_n\} : 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{7},\ -\frac{1}{9},\ \cdots$$

의 홀수 번째 항들을 차례로 나열하여 만든 새로운 수열

$$\{a_{2n-1}\} : 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \cdots,\ \frac{1}{2n-1}$$

은 0에 수렴한다. 마찬가지로 짝수 번째 항들을 차례로 나열하여 만든 새로운 수열

$$\{a_{2n}\} : -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{7},\ \cdots,\ -\frac{1}{2n+1}$$

도 0에 수렴한다. 즉, $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$임을 알 수 있다.

이와 같이 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음의 성질이 성립한다.

(1) $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$ (α는 상수)이면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다.

(2) $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}a_{2n}$이면 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

또한, 같은 원리로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 부분합을 S_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 S에 수렴한다. (단, S는 상수이다.)

예를 들어 급수 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_{2n-1}=1+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}\right)$$

Topic 1 부분합과 급수의 수렴, 발산 정답 및 해설 P 77

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 할 때,

(1) $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 S에 수렴한다.

(2) $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

Topic 1-1 다음은 급수 $-2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\cdots$의 수렴, 발산을 조사하는 과정이다.

> 수열 $-2,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을
> S_n이라 하면
> $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때, $\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\boxed{(가)}$
> $n=2m$ (m은 자연수)일 때, $\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\boxed{(나)}$
> 따라서 주어진 급수는 발산한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값을 구하여라.

Topic 1-2 수열 $\{(-1)^n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, **〈보기〉**의 수열 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

이 책의 차례

Ⅲ 적분법

특 강

Topic

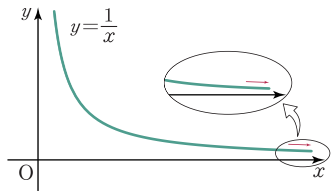
생각의 질서

Ⅰ 수열의 극한

01 수열의 극한

함수 $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$에서 x의 값이 한없이 커지면 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$x\to\infty$일 때 함수 $f(x)$는 0에 수렴



한다. 즉,

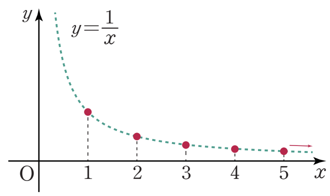
$x\to\infty$일 때 함수 $f(x)$의 극한값은 0

이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

한편, 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n이 $a_n=\frac{1}{n}$일 때

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{3},\ a_4=\frac{1}{4},\ \cdots$$



이므로 순서쌍 $(n,\ a_n)$을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 일반항이 $a_n=\frac{1}{n}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

n이 한없이 커지면 a_n의 값은 0에 한없이 가까워진다.
$\iff$ $n\to\infty$일 때 수열 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다.
$\iff$ $n\to\infty$일 때 수열 $\{a_n\}$의 극한값은 0이다.
$\iff$ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

1 수열의 수렴과 발산

1. 수열의 수렴

항이 무한히 많은 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값이 어떤 일정한 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, 기호로

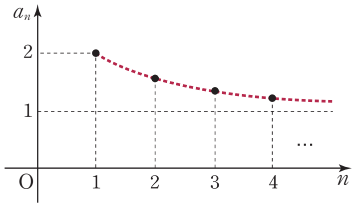
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

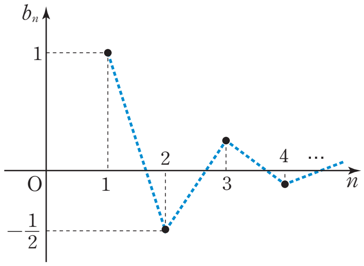
와 같이 나타낸다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 한다.

예를 들어 두 수열

$$\{a_n\} : 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots \qquad \{b_n\} : 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots$$

에 대하여 n이 커짐에 따라 a_n, b_n의 값이 변하는 상태를 그래프로 나타내면 다음과 같다.





위의 그래프에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $\frac{n+1}{n}$은 1에 한없이 가까워지고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1에 수렴하고, 수열 $\{b_n\}$은 0에 수렴한다. 즉, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

필수개념 수열의 수렴

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값이 α에 한없이 가까워지면

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \iff \text{수열 } \{a_n\}\text{은 } \alpha\text{에 수렴한다.}$$
$$\iff \text{수열 } \{a_n\}\text{의 극한값은 } \alpha\text{이다.}$$

PLUS α

∞(무한대)는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호이다.

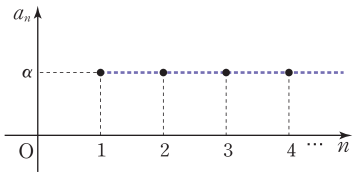
연구 1 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\alpha$일 때도 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\alpha=\alpha$$

이다. 따라서

극한값이란 「수열이 이미 도달했거나 도달하려는 목표값」

이라고 생각하면 된다.



연구 2 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \iff \lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha \text{ (단, } \alpha\text{는 상수이다.)}$$

개념 확인

다음 수열의 극한값을 구하여라.

(1) $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{n^2},\ \cdots$

(2) $-1,\ -1,\ -1,\ \cdots,\ -1,\ \cdots$

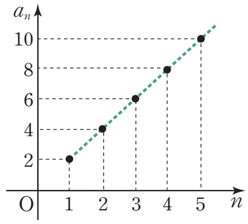
풀이 (1) n이 한없이 커질 때, $\frac{1}{n^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열의 극한값은 0이다.

(2) n이 한없이 커질 때, 각 항의 값은 항상 -1이므로 주어진 수열의 극한값은 -1이다.

2. 수열의 발산

수열

$$\{a_n\} : 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots$$



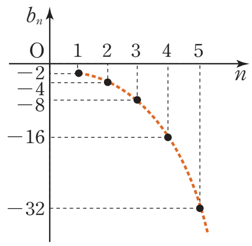
에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값은 한없이 커진다. 즉, a_n의 값은 일정한 값에 가까워지지 않으므로 수열 $\{a_n\}$은 수렴하지 않는다. 이와 같이 수열이 수렴하지 않을 때, 이 수열은 발산한다고 한다.

특히, 위의 수열 $\{a_n\}$과 같이 n이 한없이 커질 때, a_n의 값도 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 **양의 무한대로 발산**한다고 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

또한, 수열

$$\{b_n\} : -2,\ -4,\ -8,\ -16,\ \cdots,\ -2^n,\ \cdots$$



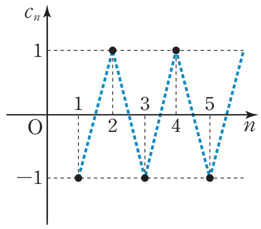
과 같이 n이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 **음의 무한대로 발산**한다고 하고, 기호로

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$$

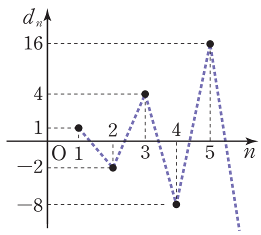
와 같이 나타낸다.

한편, 수열

$$\{c_n\} : -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$$
$$\{d_n\} : 1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots,\ (-2)^{n-1},\ \cdots$$



과 같이 n이 한없이 커질 때, 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지 않는 수열은 진동한다고 한다.



일반적으로 진동하는 경우를 포함하여 수렴하지 않는 수열은 발산한다고 하고, **수렴하지 않는 수열의 극한값은 없다**고 한다.

필수개념 **수열의 발산**

수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 발산한다고 한다.

(1) 양의 무한대로 발산 ➔ $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

(2) 음의 무한대로 발산 ➔ $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

(3) 진동

PLUS α

수렴하지 않는 수열의 극한값은 없다.

연구 1 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$는 수열 $\{a_n\}$의 극한값이 ∞라는 뜻이 아니라 a_n의 값이 한없이 커지는 상태라는 것을 의미한다. 따라서 이때는 '**극한값이 없다**'고 한다.

연구 2 다음의 성질들은 직관적으로 받아들여 이용하도록 한다.

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \iff \lim_{n\to\infty}(a_n+c)=\infty$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$일 때, $c>0$이면 $\lim_{n\to\infty}(ca_n)=\infty$

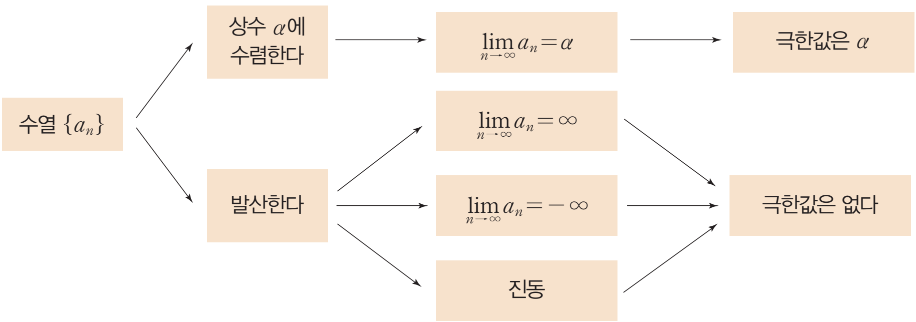
$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$일 때, $c<0$이면 $\lim_{n\to\infty}(ca_n)=-\infty$

연구 3 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$이다.

예를 들어 $\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$, $\lim_{n\to\infty}|(-2)^n|=\infty$이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(-2)^n}=0$$

연구 4 지금까지 공부한 수열의 수렴과 발산을 정리하면 다음과 같다.



2 극한값의 계산

1. 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴할 때, 두 수열의 각 항의 실수배, 합, 차, 곱, 몫으로 이루어진 수열은 각각 수렴한다.

예를 들어 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 $a_n=1+\dfrac{1}{n}$, $b_n=2-\dfrac{2}{n}$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1,\ \lim_{n\to\infty} b_n=2\text{이므로 } \lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=1+2=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_n+b_n=3-\frac{1}{n}\text{이므로 } \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이다. 따라서 ㉠, ㉡으로부터

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$$

임을 알 수 있다.

또한, 두 수열의 각 항의 차로 이루어진 수열 $\{a_n-b_n\}$의 일반항은

$$a_n-b_n=-1+\frac{3}{n}\text{이므로 } \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-1$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=1-2=-1$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n$$

한편, 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 2배하여 만든 수열 $\{2a_n\}$의 일반항은 $2a_n=2+\dfrac{2}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} 2a_n=2=2\lim_{n\to\infty} a_n$$

이 성립한다.